Функция II

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Функции, заданные параметрически. Полярная система координат. Функции нескольких переменных. Неявно заданные функции.

Анимация образования кривых и поверхностей. Анимация демонстрации графиков функций различных типов.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Применение системы *Mathematica* для изображения графиков функций.

13 февраля 2012 г.

1 Параметрически заданные функции на плоскости

Очень часто привычные для нас кривые мы не можем считать графиками функций, потому что в декартовой системе координат некоторым абсциссам соответствуют несколько ординат такой кривой. Например, обычная окружность вида $x^2 + y^2 = 1$ не может быть графиком функции, так как, скажем, для $x = 1/2$ на окружности найдется две точки с такой абсциссой: $(1/2, \sqrt{3}/2)$ и $(1/2, -\sqrt{3}/2)$. Если в определении функции допустить, что значению аргумента может соответствовать несколько ее значений, мы придем к понятию ***многозначной*** функции; тогда функции, рассмотренные на предыдущей лекции, естественно назвать ***однозначными***.

Для изучения и использования многозначных функций существует несколько подходов. Мы рассмотрим параметрическое представление, задание функций в полярной системе координат и в неявной форме.

Параметрическое задание функции на плоскости заключается в том, что с помощью специального вспомогательного аргумента, обычно $t \in T \subset \mathbb{R}$, который называют ***параметром***, записывают формулы для координат x и y

точек кривой, которая имеет смысл графика многозначной функции:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t),\ t \in T \subset \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Система уравнений (1) называется ***параметрически заданной функцией***, хотя функций здесь не одна, а две, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Рассматривая функции $x(t)$ и $y(t)$ в качестве координат точки $(x(t), y(t))$ на плоскости xOy, можно представить, что при изменении параметра t соответственно изменяются координаты этой точки, и она описывает некоторую кривую на плоскости. Эта кривая называется ***траекторией***, или ***графиком***. Точное определение графика таково: $\Gamma = \{(x, y) : x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in T\}$. Функции $x(t)$ и $y(t)$ называются ***координатными***.

Упомянутая окружность $x^2 + y^2 = 1$ в параметрической форме имеет вид

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t,\ t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$

Действительно, $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t \equiv 1$. Параметр t в данном случае имеет смысл угла между радиусом окружности и положительной полуосью абсцисс.

Система уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos t, \\ y = y_0 + b\sin t,\ t \in [0; 2\pi], \end{cases}$$

задает в параметрической форме эллипс, потому что

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2\sin^2 t}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t \equiv 1.$$

На рис. 1 с помощью анимации показано, как точка $(x(t), y(t))$, где $x(t) = a\sin t$, $y(t) = b\cos t$, при изменении параметра t, которым является угол наклона радиус-вектора[†] этой точки к положительной полуоси абсцисс, вычерчивает эллипс, являющийся графиком таким образом заданной функции.

Параметрически заданную функцию можно превратить в обычную, если функция $\varphi(t)$ или функция $\psi(t)$ имеют обратные функции. В первом случае выразим t через x: $t = \varphi^{-1}(x)$, а затем подставим это выражение вместо t во второе уравнение системы (1): $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Во втором случае действуем аналогично и находим $x = \varphi(\psi^{-1}(y))$.

Например, параметрически заданная функция

$$\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2,\ t \in (-\infty, \infty), \end{cases}$$

[†]Радиус-вектором точки называется отрезок, соединяющий начало координат с этой точкой.

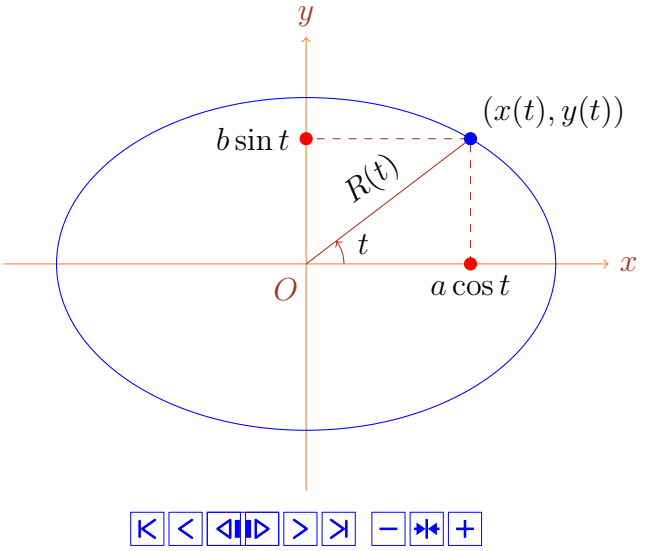
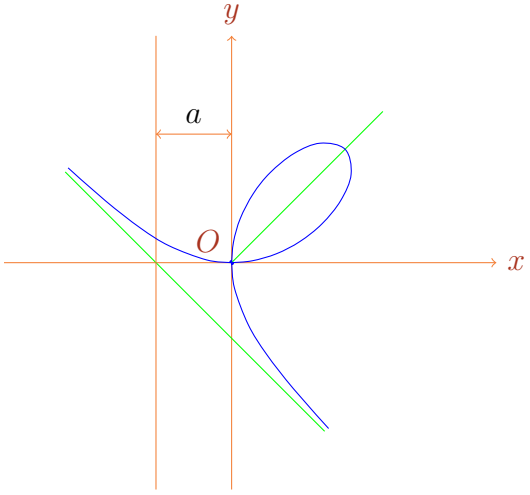


Рис. 1. Эллипс как траектория, $R(t) = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$.

после преобразований $t = \sqrt[3]{x}$, $y = (\sqrt[3]{x})^2 = x^{2/3}$ приобретает вид $y = f(x)$.

На анимационном рис. 2 собраны наиболее известные в математике и технических науках параметрически заданные функции. Кликая мышкой на рис., можно просмотреть всю галерею примеров. Формулы для параметрически заданных функций выделены синим цветом. Еще несколько таких функций показаны на рис. 5, хотя обычно их рассматривают в качестве функций, заданных в полярной системе координат.



Декартов лист:

$$x(t) = \frac{3at}{1+t^3},$$
$$y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

$$\rho = \frac{3a \cos\varphi \sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}.$$

$$x^3 + y^3 = 3\,axy.$$

Рис. 2. Параметрически заданные функции.

В Приложении[1)]показано, как строить графики параметрически заданных функций в системе *Mathematica*.

2 Полярная система координат

Полярной системой координат на плоскости называется совокупность двух объектов на плоскости: точки P, которая называется ***полюсом*** и оси p, которая выходит из полюса и называется ***полярной осью***. Координатами точки M в этой системе координат считают две величины: ***полярный радиус*** $\rho \geq 0$, который представляет собой расстояние от точки M до полюса P; и ***полярный угол*** φ, являющийся углом между полярной осью и отрезком OM (рис. 3, а)).

Угол измеряют против часовой стрелки. Для $\rho = 0$ угол φ не определен (в этом случае точку M обычно отождествляют с полюсом), а для других значений радиуса определяется с точностью до угла $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Как правило, полярный угол ограничивается диапазоном значений $[0; 2\pi)$, или $(-\pi, \pi]$. Это устраняет неоднозначность.

Введем на плоскости наряду с полярной системой координат еще и декартову систему координат, совместив ее начало O с полюсом, а положительную полуось Ox – с полярной осью.

Из рис. 3, б) нетрудно понять, что декартовы координаты (x, y) точки M выражаются через ее полярные координаты (ρ, φ) формулами ($x = OA$, $y = OB$):

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi. \tag{2}$$

В свою очередь полярные координаты выражаются через декартовы следующим образом, $\varphi \in (-\pi; \pi]$:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \text{не определен}; & x = 0,\ y = 0; \\ \frac{\pi}{2}; & x = 0,\ y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}; & x = 0,\ y < 0; \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}; & x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}; & x < 0,\ y \geq 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}; & x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Если же $\varphi \in [0, 2\pi)$, то используют другие формулы[2)].

Функции в полярной системе координат задают в виде $\rho = \rho(\varphi)$. Например, кардиоида определяется формулой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (ср. с параметрическим заданием этой кривой). Наиболее простой является функция, описывающая окружность радиуса R с центром в начале координат.

Действительно, такая окружность в декартовой системе координат имеет

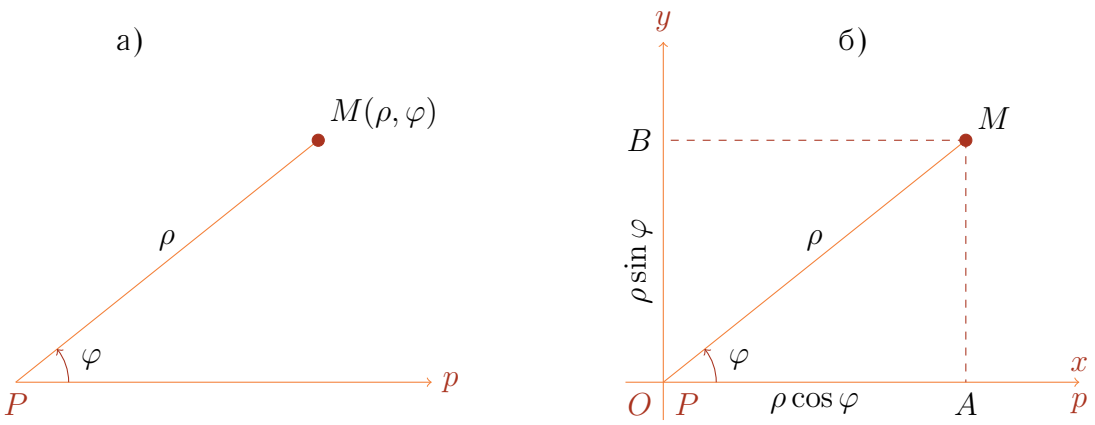


Рис. 3. Полярная система координат.

уравнение $x^2 + y^2 = R^2$. Подставим вместо x и y их выражения из формул (2):

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = R^2,\ \rho^2 \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi\right) = R^2, \rho^2 = R^2,$$
$$\rho = R.$$

Последнее уравнение и есть уравнение окружности в полярной системе координат.

Кривую в полярной системе координат можно представить как результат движения точки $(\varphi, \rho(\varphi))$ на плоскости, см. анимационный рис. 4.

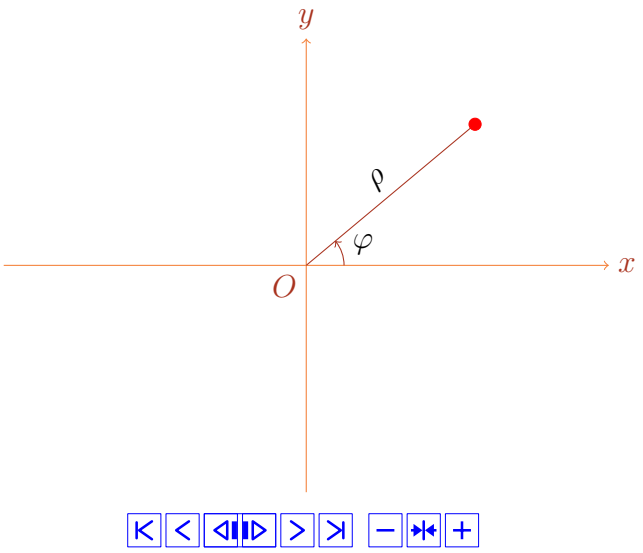
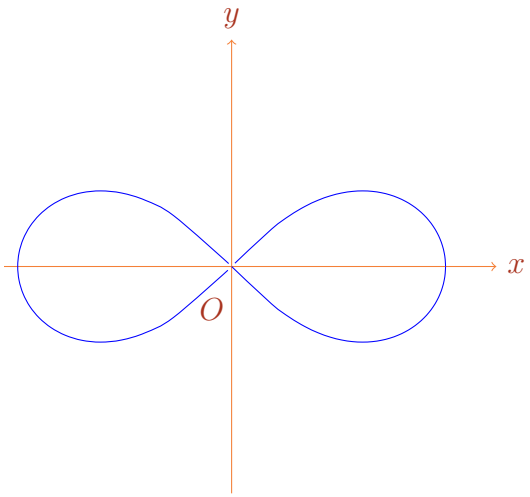


Рис. 4. Движение в полярной системе координат.

В принципе любую функцию, заданную в полярной системе координат в виде $\rho = \rho(\varphi)$, нетрудно превратить в функцию, заданную в параметрической форме: $x(\varphi) = \rho(\varphi) \cos \varphi$, $y(\varphi) = \rho(\varphi) \sin \varphi$, причем, роль параметра отводится полярному углу φ.

Примеры кривых в полярной системе координат можно увидеть на рис. 2,

причем, их уравнения выделены красным цветом. Анимационный рис. 5 демонстрирует еще несколько кривых, заданных в полярной системе координат. Просмотр осуществляется щелканьем мышкой на рис.



Лемниската Бернулли:

$$x(t) = \sqrt{2}\,c\,\frac{t+t^3}{1+t^4},$$
$$y(t) = \sqrt{2}\,c\,\frac{t-t^3}{1+t^4}.$$

$$\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}.$$

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0.$$

Рис. 5. Кривые в полярной системе координат.

В Приложении[3)] показано, как *Mathematica* строит графики функций в полярной системе координат.

3 Функции нескольких переменных

Пара чисел x и y называется ***упорядоченной*** и обозначается (x, y), если равенство $(x, y) = (x', y')$ эквивалентно одновременному выполнению двух равенств: $x = x'$ и $y = y'$. ***Декартовым произведением*** $X \times Y$ ***двух множеств*** X и Y называется множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$. По индукции ***декартовым произведением*** $X_1 \times \ldots \times X_n$ ***n множеств*** $X_1, \ldots, X_n$ называется множество $(X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n$. В случае $X_1 = \ldots = X_n = X$ используют обозначение $X^n \triangleq X \times \ldots \times X$.

Если в определении функции, рассмотренном на лекции «Функция I» область определения функции $X \subset \mathbb{R}^n$, а множество ее значений $Y \subset \mathbb{R}$, то такая функция называется ***функцией нескольких (многих) переменных*** и обозначается $y = f(x_1, \ldots x_n)$, или $y = y(x_1, \ldots x_n)$, где $(x_1, \ldots x_n) \in X$, $y \in Y$. Так как упорядоченный набор чисел $(x_1, \ldots x_n)$ можно считать координатами точки $M(x_1, \ldots x_n)$ в n-мерном пространстве, то функцию нескольких переменных называют также ***функцией точки*** и обозначают $y = f(M)$, или $y = y(M)$. Употребляются также уже использовавшиеся нами обозначения $f : X \longrightarrow Y$ и $X \xrightarrow{f} Y$.

Переменные $x_1, \ldots x_n$ называют ***независимыми***, или ***аргументами***, а

переменную y — ***зависимой***, или ***функцией***. Функцию двух переменных обычно обозначают $z = f(x, y)$, а функцию трех переменных — $u = f(x, y, z)$.

Пример 1. *Синусоидальный ток i в цепи переменного тока выражается формулой*

$$i = I \sin(\omega t - \varphi),$$

где I — амплитуда тока, ω — его частота, t — время, φ — фаза. Таким образом, ток является функцией четырех переменных.

3.1 Способы задания функции

3.1.1 Аналитический способ задания

Функция задается формулой (см. предыдущий пример). Вот еще несколько примеров:

$$y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n/n, \;\; y = \log_2(x_1^2 + x_2^2 - 1), \;\; y = x_1 x_2^{x_3}.$$

В этом случае, как и в случае функции одной переменной, часто областью определения считают область допустимых значений аргументов, т.е. тех их значений, для которых вычисление значения функции может быть доведено до числа. Отметим, что область определения для функции нескольких переменных может иметь довольно сложный вид.

Пример 2. *Найти область определения функции $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$.*

Решение. Подкоренное выражение должно быть неотрицательно. Это выполнится, если выражения в круглых скобках будут либо оба неотрицательны, либо оба неположительны. В первом случае получаем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0, \\ 4 - x^2 - y^2 \geq 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

Это — кольцо с радиусами 1 и 2 и центром в начале координат.

Во втором случае получим несовместные неравенства. Область определения функции показана на рис. 6. □

Все, что говорилось о достоинствах и недостатках этого способа задания в отношении функции одного аргумента, сохраняет силу и для функции нескольких переменных.

3.1.2 Графический способ задания

Прежде всего дадим определение ***графика функции*** нескольких переменных. Им называется множество

$$\Gamma = \{(x_1, \ldots, x_n, y) : y = f(x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n) \in X\}.$$

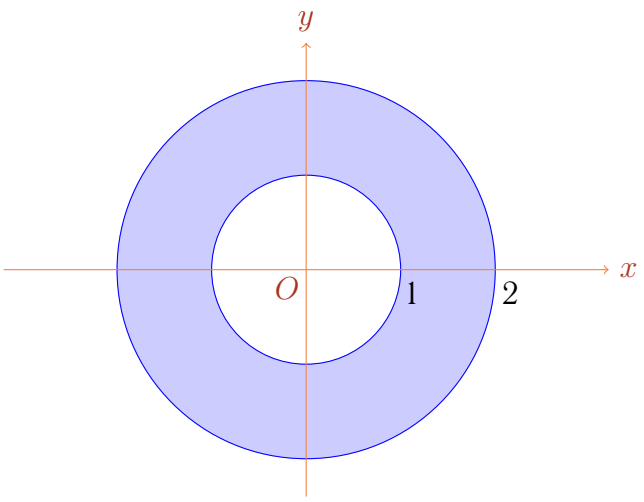


Рис. 6. Область определения для примера 2.

Хотя график определен для функции произвольного числа аргументов, но построить его можно только для функции двух переменных (см. рис. 7). Причина проста: графиком функции двух переменных является поверхность в трехмерном пространстве, а, если аргументов больше, чем два, то пространство требуется уже большей размерности: четырех- пятимерное и т.д. Но в таких пространствах человек ничего ни вообразить, ни изобразить не в состоянии.

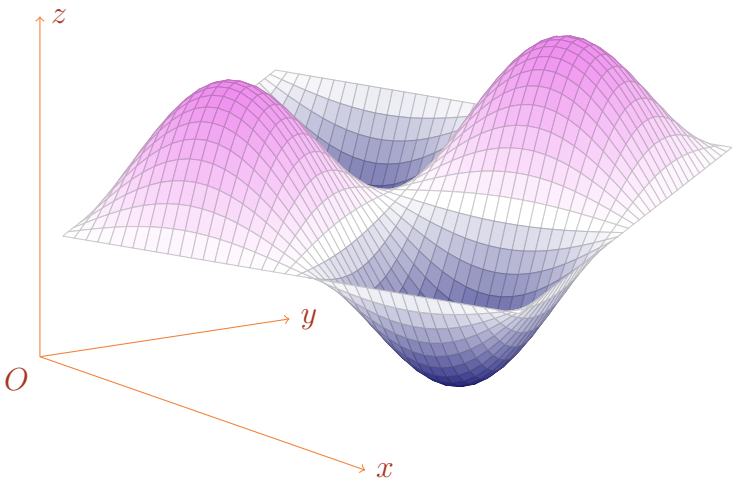


Рис. 7. График функции $z = f(x, y)$.

Вывод напрашивается сам собой: графический способ задания в случае функций многих переменных становится малопригодным, сохраняя свое значение лишь для функций двух переменных.

3.1.3 Табличный способ задания

Если таблица функции одного переменного занимает несколько страниц, то таблица функции двух переменных может уже быть небольшой книжкой, а трех переменных — небольшой библиотечкой. Поэтому встречаются такие таблицы достаточно редко.

Таким образом, табличный способ задания в случае функции нескольких переменных почти полностью теряет свое значение.

3.1.4 Алгоритмический способ задания

В принципе алгоритму все равно, описывает он функцию одного или нескольких аргументов, поэтому этот метод задания функции практически сохраняет все свои сильные стороны, не теряя, конечно, и своих недостатков.

□

Резюмируя все сказанное о функциях нескольких переменных, можно утверждать, что более наглядные и менее поддающиеся аналитическим исследованиям методы, графический и табличный, свое значение утрачивают, а менее наглядные, но более абстрактные методы, аналитический и алгоритмический, приобретают в результате основное значение. Другими словами, алгебра и анализ побеждают геометрию. Хотя в качестве аналогий геометрические представления продолжают играть большую роль и в достаточно абстрактной области функций многих переменных.

В Приложении[4)]рассмотрены возможности системы *Mathematica* по решению задач в области функций многих переменных.

4 Параметрически заданные функции в пространстве

4.1 Функции одного параметра

Для описания движения точки в пространстве надо, чтобы все три ее координаты могли зависеть от параметра. В результате приходим к понятию однопараметрической функции, заданной в пространстве:

$$\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t), \\ z = \gamma(t), \ t \in T \subset \mathbb{R}. \end{cases}$$

Понятно, что движущаяся в пространстве точка $(x(t), y(t), z(t))$ вычерчивает в нем некоторую кривую. Эта кривая, как и для случая плоскости, называется ***траекторией***, а координаты движущейся точки — ***координатными функциями***.

Если предположить, что, скажем, из первого уравнения можно выразить t через x, $t = \alpha^{-1}(x)$, то, подставляя это выражение вместо t в остальные уравнения, получим $y = \beta(\alpha^{-1}(x))$, $z = \gamma(\alpha^{-1}(x))$. Каждое из этих уравнений представляет собой уравнение поверхности, так что функция одного параметра в пространстве действительно является кривой (образованной пересечением двух поверхностей).

На анимационном рис. 8 показана так называемая винтовая линия, образующаяся при перемещении точки, участвующей одновременно в двух движениях: с постоянной угловой скоростью по окружности и равномерного движения по прямой, перпендикулярной плоскости этой окружности. Эта кривая задается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \\ z = vt, \ t \in [0, \infty), \end{cases}$$

где R — радиус окружности с центром в начале координат, расположенной на плоскости xOy, $v > 0$ — скорость движения точки вдоль оси Oz (см. рис.). Синяя точка движется по окружности (параметр t имеет для нее смысл угла наклона радиус-вектора этой точки к оси абсцисс), а зеленая — вдоль оси Oz (для нее параметр t играет роль времени). Эти цветные точки и точка O являются вершинами прямоугольника, вращающегося вокруг оси аппликат, вертикальные стороны которого все время удлиняются. Конец диагонали прямоугольника, выходящей из начала координат, обозначенный красной точкой, участвуя в двух движениях, и описывает винтовую линию в пространстве.

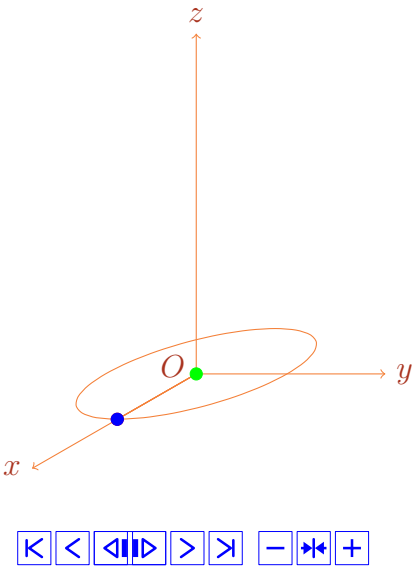


Рис. 8. Винтовая линия.

4.2 Функции двух параметров

Если каждая координата точки зависит от двух параметров, то мы получаем двухпараметрическое задание функции в пространстве:

$$\begin{cases} x = \alpha(u, v), \\ y = \beta(u, v), \\ z = \gamma(u, v), \ (u, v) \in U \times V; \ U, V \subset \mathbb{R}. \end{cases}$$

Если удается, допустим, первые два уравнения разрешить относительно параметров, т.е. получить равенства $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$, то, подставив эти выражения вместо параметров в третье уравнение, придем к уравнению $z = f(x, y)$, которое показывает, что двухпараметрическое задание функции в пространстве описывает некоторую поверхность. Это справедливо и в общем случае. Функции $\alpha(u, v)$, $\beta(u, v)$, $\gamma(u, v)$ называются ***координатными***.

Примером параметрически заданной поверхности может служить сфера радиуса R с центром в начале координат (докажите, что эти уравнения задают сферу[5)]):

$$\begin{cases} x(\varphi, \theta) = R \sin\theta \cos\varphi, \\ y(\varphi, \theta) = R \sin\theta \sin\varphi, \\ z(\varphi, \theta) = R \cos\theta, \ \varphi \in [0, 2\pi), \ \theta \in [-\pi/2, \pi/2]. \end{cases}$$

На рис. 9 с помощью анимации показано, как возникает тороидальная поверхность при вращении образующей окружности вокруг оси, расположенной в плоскости этой окружности.

Эта поверхность также является параметрической:

$$\begin{cases} x(\varphi, \psi) = (R + r\cos\varphi)\cos\psi, \\ y(\varphi, \psi) = (R + r\cos\varphi)\sin\psi, \\ z(\varphi) = r\sin\varphi; \ \varphi, \psi \in [0, 2\pi), \end{cases} \tag{3}$$

где R — расстояние от центра окружности до оси вращения, r — радиус окружности. При фиксированном значении φ получаем окружность, лежащую на поверхности тора и охватывающую ось вращения, а при фиксированном значении ψ — конкретное положение окружности, вращающейся вокруг этой оси[6)].

Отметим, что в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, возможно задание функций, зависящих и более, чем от двух, параметров.

В Приложении[7)] представлены средства системы *Mathematica*, предназначенные для изображения одно- и двухпараметрически заданных функций в пространстве.

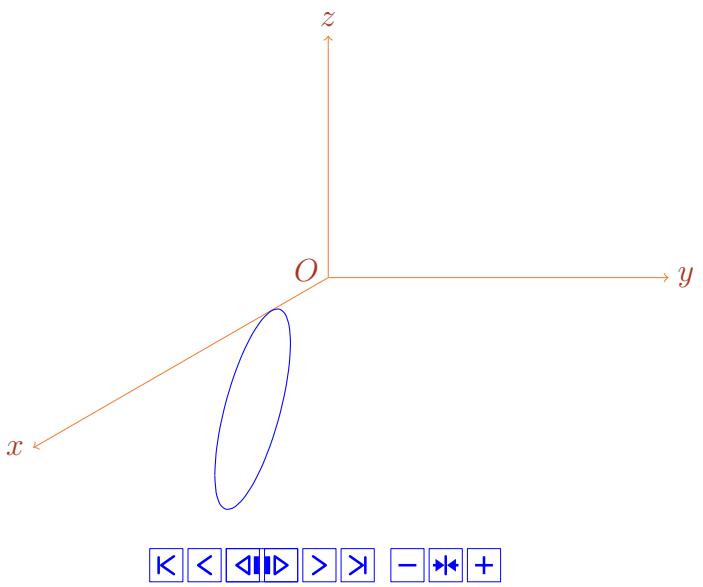


Рис. 9. Образование тороидальной поверхности.

5 Неявно заданные функции

Если задано уравнение

$$F(x, y) = 0,$$

то его называют ***неявно заданной функцией*** на плоскости, а уравнение

$$F(x, y, z) = 0,$$

— неявно заданной функцией в пространстве. Обоснование такого представления функции заключается в том, что, если из первого уравнения удается выразить, например, y через x, то получается обычная функция $y = f(x)$ одного аргумента, а, если из второго уравнения возможно выразить, скажем, z через x и y, то возникает обычная функция двух переменных $z = f(x, y)$. Например, сфера радиуса R с центром в начале координат задается в виде неявной функции как $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, а тороидальна поверхность, показанная на рис. 9, — в виде $(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)^2-4R^2(x^2+y^2) = 0$. На рис. 2 и 4 многие функции имеют свое неявное выражение, представленное формулами зеленого цвета.

В Приложении[8)]показаны возможности системы *Mathematica* для графического изображения неявных функций.

Функции рассмотренных на лекции типов часто используются в технических науках. Три примера из их числа также приведены в Приложении[9)].

Приложение

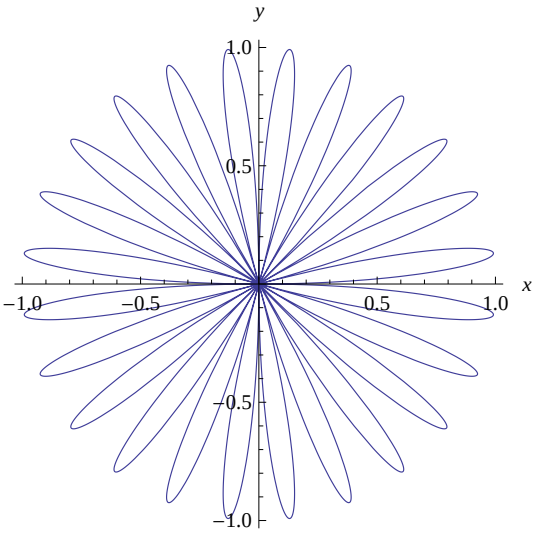
1) Для построения параметрически заданных функций в системе *Mathematica* имеется оператор `ParametricPlot[{x,y},{t,t_min,t_max}]`, где `x`, `y` — координатные функции, `t` — параметр, принимающий значения на отрезке $[\mathtt{t_{min}}, \mathtt{t_{max}}]$. Вместо списка координатных функций можно записать список списков таких функций, тогда *Mathematica* построит графики для всех заданных функций на одном рисунке.

Построим функцию, заданную системой параметрических уравнений

$$\begin{cases} x(t) = \sin 12t \cos t, \\ y(t) = \sin 12t \sin t, \ t \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

Для этого выполним оператор

```
ParametricPlot[{Sin[12t]Cos[t],Sin[12t]Sin[t]},{t,0,2π},AxesLabel → {x,y}]
```



2) Формулы для $\varphi \in [0; 2\pi)$ таковы:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \text{не определен}; & x = 0, \ y = 0; \\ \frac{\pi}{2}; & x = 0, \ y > 0; \\ \frac{3\pi}{2}; & x = 0, \ y < 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; & x > 0, \ y \geq 0; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; & x < 0; \\ 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; & x > 0, \ y < 0. \end{cases}$$

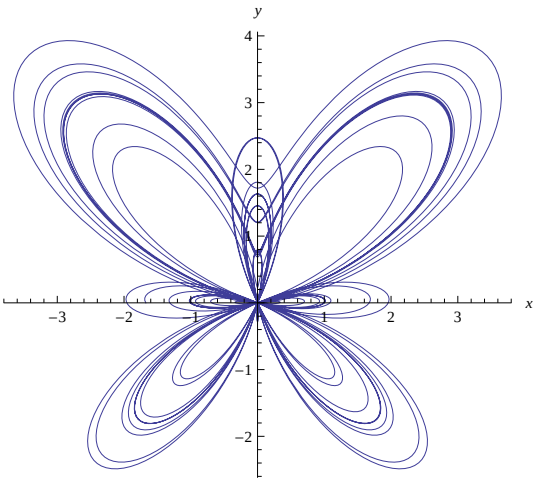
3) В полярной системе координат система *Mathematica* строит графики с помощью оператора `PolarPlot[ρ,{φ,φ_min,φ_max}]`, где ρ — выражение для функции $\rho(\varphi)$, φ — полярный угол, принимающий значения на отрезке $[\varphi_{\mathtt{min}}, \varphi_{\mathtt{max}}]$. Если вместо выражения ρ записать список из таких выражений, то *Mathematica* построит на одном рисунке графики всех функций из этого списка.

Построим красивую «бабочку», которая в полярной системе координат выражается функцией

$$\rho(\varphi) = e^{\sin\varphi} - 2\cos 4\varphi + \sin^5 \frac{2\varphi - \pi}{24}.$$

Достаточно применить указанный оператор:

```
PolarPlot[e^Sin[φ] - 2Cos[4φ] + Sin[(2φ - π)/24]^5,{φ,0,20π},
        AxesLabel → {x,y}]
```



[4] Функции нескольких переменных задаются в системе *Mathematica* аналогично тому, как задавалась функция одной переменной, просто увеличивается список аргументов. Зададим, например, функцию синусоидального тока $i = I\sin(\omega t - \varphi)$, рассмотренную на лекции:

```
i[I_,ω_,φ_,t_] := I Sin[ω t - φ]
```

Теперь можно найти ее точное и приближенное значения в точке, например, $(2, 3, \pi/2, 5)$:

```
i[2,3,π/2,5]
-2 Cos[15]
%//N
1.51938
```

Область определения функции нескольких переменных находят с помощью уже известного нам оператора `Reduce`. Найдем область определения функции из примера 2:

```
Reduce[(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) ≥ 0,{x,y},Reals]
(x == -2 && y == 0) || (-2 < x < -1 && -√(4 - x^2) ≤ y ≤ √(4 - x^2)) ||
    (-1 ≤ x ≤ 1 && (-√(4 - x^2) ≤ y ≤ -√(1 - x^2) || √(1 - x^2) ≤ y ≤ √(4 - x^2))) ||
    (1 < x < 2 && -√(4 - x^2) ≤ y ≤ √(4 - x^2)) || (x == 2 && y == 0)
```

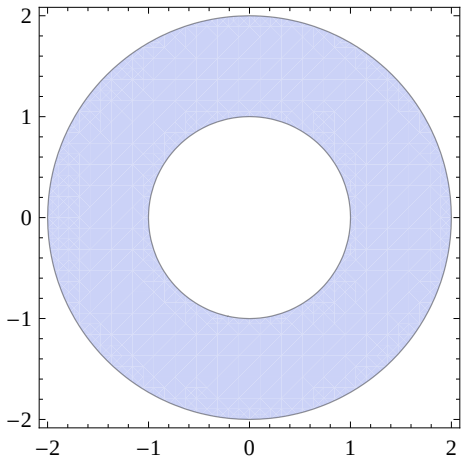
Такое же решение даст и применение оператора (*Mathematica* 10.0)

```
FunctionDomain[Sqrt[(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)],{x,y},
    Method → {"Reduced" → True}]
```

в котором опция `Method` обеспечивает использование `Reduce`, иначе в ответе получается неравенство, не дающее наглядной интерпретации искомой области определения функции.

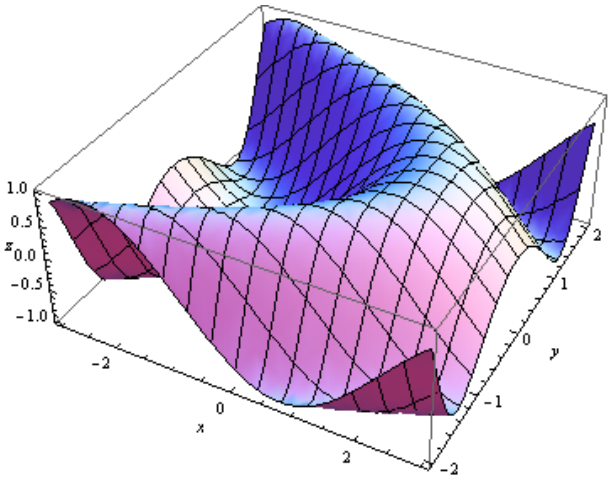
С помощью оператора `RegionPlot[pred,{x,x_min,x_max},{y,y_min,y_max}]` можно выполнить графическое решение этой задачи. Аргументами оператора являются `pred` — предикат, определяющий изображаемую область и состоящий из равенств и неравенств, связанных логическими операциями; и списки, содержащие названия переменных и диапазоны их изменения. Применим такой оператор в нашей задаче:

```
RegionPlot[(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) ≥ 0,{x,-2,2},{y,-2,2},
        AxesLabel → {x,y}]
```



Оператор `Plot3D[f,{x,x_min,x_max},{y,y_min,y_max}]`, аргументами которого являются `f` — функция двух переменных или список таких функций и списки переменных и диапазонов их изменения, строит график одной или нескольких функций двух переменных. Например, чтобы изобразить график функции $\sin(x+y^2)$, надо выполнить оператор:

```
Plot3D[Sin[x + y^2],{x,-3,3},{y,-2,2},AxesLabel → {x,y,z}]
```



5) Найдем сумму квадратов координатных функций:

$$x^2+y^2+z^2 = R^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + R^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + R^2\cos^2\theta = \\ = R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta \equiv R^2.$$

6) Пусть зафиксирован параметр $\varphi=\varphi_0$. Тогда, возводя в квадрат обе части первых двух уравнений (3) и складывая их, приходим к системе вида

$$\begin{cases} x^2+y^2=(R+c)^2, \\ z=z_0, \end{cases} \qquad (\text{П}1)$$

где $c=r\cos\varphi_0$, $z_0=r\sin\varphi_0$. Это — уравнение окружности с центром на оси Oz радиуса $R+c$, расположенной в плоскости $z=z_0$.

Пусть теперь зафиксирован параметр $\psi = \psi_0$. Обозначим $a = R\cos\psi_0$, $a = R\sin\psi_0$ и перепишем первые два уравнения (3) в виде

$$\begin{cases} x - a = r\cos\varphi\cos\psi_0, \\ y - b = r\cos\varphi\sin\psi_0. \end{cases} \tag{П2}$$

Возведем в квадрат обе части уравнений и сложим их:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\cos^2\varphi. \tag{П3}$$

Так как из третьего уравнения (3) следует, что $z^2 = r^2\sin^2\varphi$, то $r^2\cos^2\varphi = r^2 - z^2$. Используя это в уравнении (П3), перепишем его:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = r^2. \tag{П4}$$

Далее разделим второе уравнение (П2) на первое:

$$\frac{y-a}{x-b} = \operatorname{tg}\psi_0,$$

или

$$y - a = k(x-b),$$

где $k = \operatorname{tg}\psi_0$. Объединяя полученное уравнение с уравнением (П4), приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = r^2, \\ y - a = k(x-b), \end{cases}$$

первое из которых является уравнением сферы радиуса r с центром в точке $(a, b, 0)$, а второе — уравнением плоскости, проходящей через эту же точку и содержащей ось Oz. Получающаяся в центральном сечении сферы плоскостью окружность и представляет собой образующую окружность тороидальной поверхности в положении, которое определяется параметром $\psi = \psi_0$.

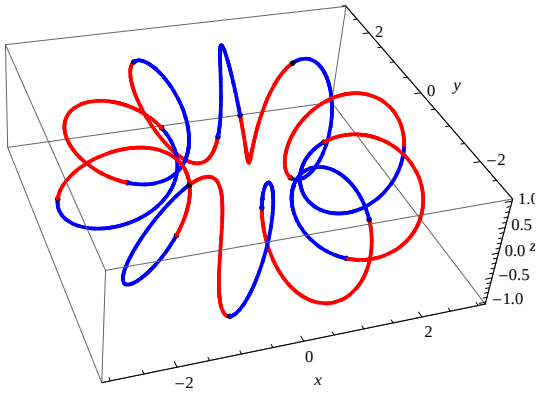
[7] Оператор `ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,t`$_{\mathtt{min}}$`,t`$_{\mathtt{max}}$`}]`, где `x`, `y`, `z` — координатные функции, `t` — параметр, принимающий значения на отрезке $[\mathtt{t}_{\mathtt{min}}, \mathtt{t}_{\mathtt{max}}]$, выполняет построение графика однопараметрической функции в пространстве. Вместо списка координатных функций можно записать список списков таких функций, тогда *Mathematica* построит графики для всех заданных функций на одном рисунке.

Построим, например, кривую, которая представляет собой что-то вроде винтовой линии, навитой на тор; эта линия определяется следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x(t) = (2 + \cos 10t)\cos t, \\ y(t) = (2 + \cos 10t)\sin t, \\ z(t) = \sin 10t, \ t \in [0; 2\pi). \end{cases}$$

Обратимся с таким заданием к системе *Mathematica*:

```
ParametricPlot3D[{(2 + Cos[10t])Cos[t],(2 + Cos[10t])Sin[t],Sin[10t]},
    {t,0,2π},PlotStyle → Thick,Mesh → 15,MeshShading → {Red,Blue},
    AxesLabel → {x,y,z}]
```



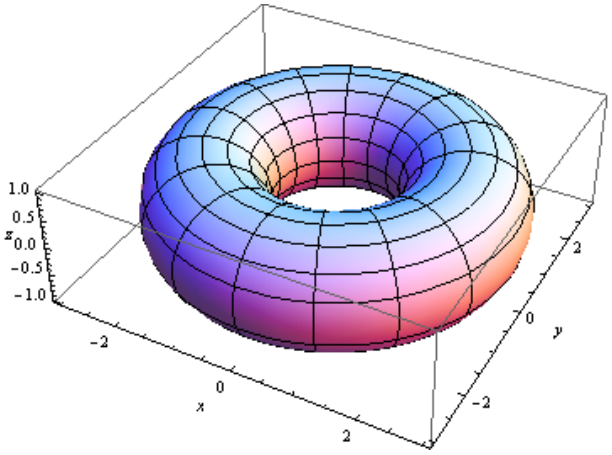
Здесь были использованы следующие опции графического оператора: `PlotStyle → Thick` — линия должна быть толще, чем обычно; `Mesh → 15` — кривая должна быть разбита на 15 равных частей; `MeshShading → {Red,Blue}` — части кривой должны поочередно окрашиваться красным и синим цветом.

Тот же оператор `ParametricPlot3D` используется и для построения двухпараметрических функций в пространстве; надо только добавить еще один параметр вместе с диапазоном его изменения. Изобразим тороидальную поверхность

$$\begin{cases} x(t) = (2+\cos v)\cos u, \\ y(t) = (2+\cos v)\sin u, \\ z(t) = \sin v, \ u, v \in [0; 2\pi); \end{cases}$$

дав задание

```
ParametricPlot3D[{(2 + Cos[v])Cos[u],(2 + Cos[v])Sin[u],Sin[v]},
    {u,0,2π},{v,0,2π},AxesLabel → {x,y,z}]
```

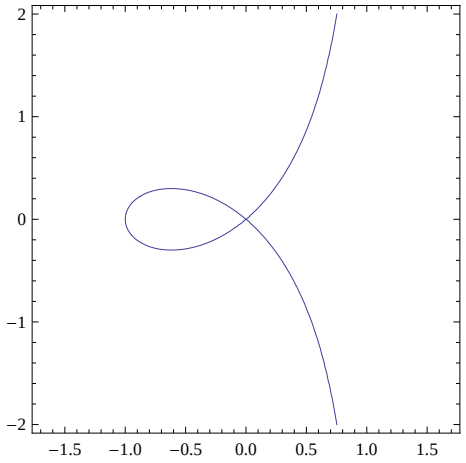


8) Для построения графиков неявных функций на плоскости служит оператор

$$\texttt{ContourPlot[f == g,\{x,x}_{\texttt{min}}\texttt{,x}_{\texttt{max}}\texttt{\},\{y,y}_{\texttt{min}}\texttt{,y}_{\texttt{max}}\texttt{\}],}$$

где $f == g$ — уравнение, определяющее неявную функцию, а дальше идут списки из названий переменных вместе с диапазонами их изменений. Используя этот оператор, построим график строфоиды, имеющей уравнение $(x+1)x^2 + (x-1)y^2 = 0$:

```
ContourPlot[(x + 1)x^2 + (x - 1)y^2 == 0,{x,-1.7,1.7},{y,-2,2}]
```

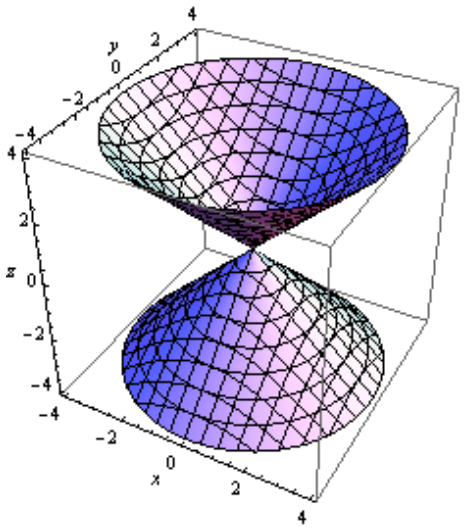


Графики неявных функций в пространстве строит оператор

$$\texttt{ContourPlot3D[f == g,\{x,x}_{\texttt{min}}\texttt{,x}_{\texttt{max}}\texttt{\},\{y,y}_{\texttt{min}}\texttt{,y}_{\texttt{max}}\texttt{\},\{z,z}_{\texttt{min}}\texttt{,z}_{\texttt{max}}\texttt{\}],}$$

отличающийся от предыдущего оператора только тем, что добавлена еще одна переменная вместе со своим диапазоном изменения. Применим этот оператор для построения конуса второго порядка:

```
ContourPlot3D[x^2 + y^2 - z^2 == 0,{x,-4,4},{y,-4,4},{z,-4,4},
    AxesLabel → {x,y,z}]
```



[9] В некоторых разделах электро- и радиотехники довольно популярны типичные параметрически заданные функции, которые называют фигурами Лиссажу. Они возникают при колебаниях мембран и в общем случае при движении точки, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных гармонических колебания. Уравнения этих фигур имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1), \\ y(t) = A_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2), \ t \in [0; T], \ T > 0. \end{cases}$$

На рис. 10 с помощью анимации показаны фигуры Лиссажу, возникающие при различных сочетаниях параметров. Чтобы их увидеть, щелкайте левой кнопкой мышки на рис.

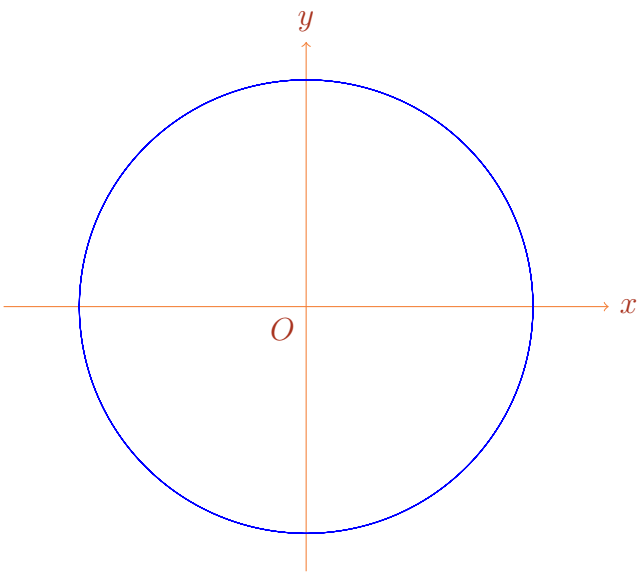


Рис. 10. Фигуры Лиссажу.

Исследование других электростатических полей приводит к их представлению в виде неявной функции, которая называется овалом Кассини. На самом деле в запись этой функции входят, кроме аргументов функции, еще и параметры, поэтому овалы Кассини — это целый класс неявных функций. Они имеют следующее уравнение:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4.$$

Построим их с помощью системы *Mathematica*. Вначале зададим функцию

```
f[x_,y_,a_,c_] := (x^2 + y^2)^2 - 2 c^2(x^2 - y^2) - a^4 + c^4
```

а затем применим оператор `ContourPlot`:

```
ContourPlot[{f[x,y,0.6,1]==0,f[x,y,0.8,1]==0,f[x,y,1,1]==0,f[x,y,1.2,1]==0,
 f[x,y,1.4,1]==0,f[x,y,1.6,1]==0},{x,-2,2},{y,-1.5,1.5},
 AspectRatio → Automatic]
```

см. рис. 11. Здесь была применена графическая опция `AspectRatio` со значением `Automatic`. Она устанавливает отношение высоты графика к его ширине. Для значения `Automatic` устанавливается естественное отношение, соответствующее заданным диапазонам изменения переменных: $[-2; 2]$ для x и $[-1.5; 1.5]$ для y.

Напоследок рассмотрим пример поля электростатического потенциала двух зарядов, которое описывается функцией одиннадцати переменных. Ими являются величины зарядов q_1 и q_2, координаты точек (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) размещения зарядов в пространстве и координаты точки (x, y, z), для которой вычисляется потенциал поля. Формула потенциала такова:

$$E = \frac{q_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2}}.$$

Конечно, функцию одиннадцати переменных изобразить невозможно, поэтому мы конкретизируем некоторые ее аргументы. Возьмем заряды величиной $q_1 = 1$ и $q_2 = -1$ и расположим первый из них в точке $(-1, 0, 0)$, а второй — в точке $(1, 0, 0)$. В результате у нас останется функция трех переменных, которую тоже нельзя нарисовать, но можно изобразить ее поверхности

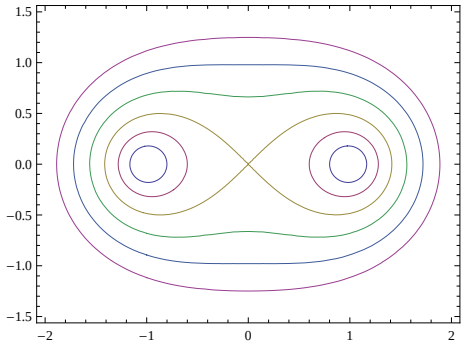


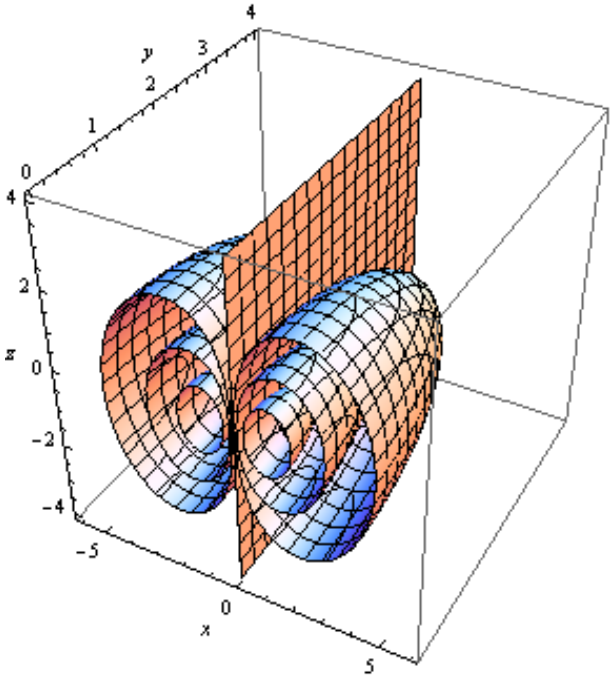
Рис. 11. Овалы Кассини.

уровня, т.е. поверхности, на которых потенциал имеет одно и то же значение (поверхности равного потенциала, или эквипотенциальные поверхности). К выполнению графической работы подключим систему *Mathematica*. Сначала зададим функцию:

```
ElecStatPot[x_,y_,z_] := 1/Sqrt[(x + 1)^2 + y^2 + z^2]
    - 1/Sqrt[(x - 1)^2 + y^2 + z^2]
```

а затем выполним построение линий равного потенциала:

```
ContourPlot3D[Evaluate[ElecStatPot[x,y,z]],{x,−6,6},{y,0,4},{z,−4,4},
  Contours → {−0.75,−0.25,−0.1,0,0.1,0.25,0.75},AxesLabel →{x,y,z}]
```



Опция `Contours` задает потенциалы −0,75; −0,25; −0,1; 0; 0,1; 0,25 и 0,75, для которых строятся эквипотенциальные поверхности.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* — М.: Наука, 1984, — с. 69-74.

[2] Вирченко Н.А., Ляшко И.И., Швецов К.И. *Графики функций: справочник.* — Киев: Наукова думка, 1981, — с. 155-197.